Espaces vectoriels et applications

Tierce
Younes

TD 1 : Espaces vectoriels et applications

1. Annie et Arthur sont frère et soeur. Annie a autant de frères que de soeurs mais Arthur a deux fois plus de soeurs que de frères. Combien y a-t-il d'enfants dans cette famille ?

1) x le nombres de filles et y le nombres de garçons.

Annie a autant de frères que de soeurs :

$$x - 1 = y$$

Arthur a 2 fois plus de soeurs que de frères

$$x = 2(y-1)$$

Méthode de Gauss et la plus rigoureuse :

$$\begin{cases} x - 1 = y \\ x = 2(y-1) = 2y - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

Il y a donc 7 personnes

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3 = 1 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

2. On considère la réaction chimique : $a\mathrm{NO_2} + b\mathrm{H_2O} \longrightarrow c\mathrm{HNO_2} + d\mathrm{HNO_3}$, où a, b, c et d sont des entiers strictement positifs inconnus. La réaction doit être équilibrée, c'est-à-dire que le nombre d'atomes de chaque élément doit être le même avant et après la réaction. Par exemple le nombre d'atomes d'oxygène doit rester le même : $2a + b = 2c + 3d$. Bien qu'il ait plusieurs valeurs possibles pour a, b, c et d qui équilibrent la réaction, calculer les entiers positifs les plus petits possibles équilibrant la réaction.

2) $a\,NO_2 + bH_2O \longrightarrow c\,HNO_2 + d\,HNO_3$

$$\begin{cases} 2a + b = 2c + 3d \\ a = c + d \\ 2b = c + d \end{cases} \qquad \begin{cases} a - c - d = 0 \\ 2a + b - 2c - 3d = 0 \\ 2b - c - d = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\begin{cases} a - c - d = 0 \\ b - d = 0 \\ -c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -c + d = 0 \\ b - d = 0 \\ a - c - d = 0 \end{cases}$$

$L_2 = L_1 + L_2$

$$\begin{cases} -c + d = 0 \\ -c + b = 0 \\ -2c + a = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c &= d \\ c &= b \\ 2c &= a \end{aligned}}$$

on fixe $d = 1$ $c = 1$

$b = 1$ et $a = 2$

3. Soit f une fonction polynomiale de degré 3 sur $\mathbb{R}$, que l'on écrit sous la forme suivante : pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Déterminer les paramètres réels a_3, a_2, a_1 et a_0 (s'il en existe) pour que f satisfasse : $f(1) = 4$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = -5$, $f(2) = 15$.

$$f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 4$$
$$f(-1) = -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0$$
$$f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0 = -5$$
$$f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 15$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -5 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow 8L_1 + L_3$

$L_4 \leftarrow L_4 - 8L_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & 27 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -17 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2$

$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right)$$

$-6a_0 = -6 \Rightarrow a_0 = 1$

Donc $a_1 = 1$, $a_2 = 1$

$a_3 = 1$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases}.$$

4. Résoudre les systèmes suivants à l'aide de l'algorithme de Gauss. On précisera dans chaque cas les variables libres et les variables liées.

$$\begin{cases} x-2y+z &= 7 \\ 2x-y+4z &= 17 \\ 3x-2y+2z &= 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-3z &= 1 \\ 2x-y+4z &= 4 \\ 3x+8y-13z &= 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-2z &= -1 \\ 3x-y+2z &= 7 \\ 5x+3y-4z &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-5y+3z-4s+2t &= 4 \\ 3x-7y+2z-5s+4t &= 9 \\ 5x-10y-5z-4s+7t &= 22 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-3z+4t &= 2 \\ 2x+5y-2z+t &= 1 \\ 5x+12y-7z+6t &= 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y+z &= 7 \\ 2x-y+4z &= 17 \\ 3x-2y+2z &= 14 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 4 & 17 \\ 3 & -2 & 2 & 14 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

On multiplie L_2 par 4

et L_3 par 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & \boxed{12} & 8 & 12 \\ 0 & 12 & -3 & -21 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 12 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array}\right)$$

On revient au lettres :

$$-11z = -33$$
$$\iff 11z = 33$$
$$\iff z = \frac{33}{11}$$
$$\iff \boxed{z = 3}$$

$$12y + 8 \times 3 = 12$$
$$\iff 12y + 24 = 12$$
$$\iff 12y = -12$$
$$\boxed{y = -1}$$

$$x - 2y + z = 7$$
$$\iff x + 2 + 3 = 7$$
$$\iff x + 5 = 7$$
$$\iff \boxed{x = 2}$$

x, y, z sont des variables liées.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 3x + 8y - 13z = 7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 3 & 8 & -13 & 7 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

Je me demande si il est mieux de se balader avec $\frac{2}{5}$ ou plutôt faire $L_2 \leftarrow L_2 \times 2$ et $L_3 \leftarrow L_3 \times 5$
optons pour la multiplication

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ 2\times \\ 1\times \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 20 & 4 \\ 0 & 10 & -20 & 20 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 20 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right)$$

Pas de solution :

$$S = \{ \emptyset \}.$$

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t & = 4 \\ 3x - 7y + 2z - 5s + 4t & = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4s + 7t & = 22 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 3 & -7 & 2 & -5 & 4 & 9 \\ 5 & -10 & -5 & -4 & +7 & 22 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 3 & -7 & 2 & -5 & 4 & 9 \\ 5 & -10 & -5 & -4 & 7 & 22 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 2 & -5 & 4 & 9 \\ 5 & -10 & -5 & -4 & 7 & 22 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

variable liés : variable liés correspondent aux pivot :
x, y, s

variable libre : z et t

$$\begin{cases} x - 2y - z - s + 2t = 5 \\ -y + 5z - 2s - 2t = -6 \\ s - 3t = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + z + s - 2t + 5 \\ y = 5z - 2(-3 + 3t) \\ s - 3t = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 11z - 15t + 26 \\ y = 5z - 8t + 12 \\ s = -3 + 3t \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{ (11z - 15t + 26, 5z - 8t + 12, -3 + 3t, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \}$$

si l'on fixe $z = 0$, $t = 0$ on obtient :

$$(26, 12, 0, -3, 0)$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4t &= 2 \\ 2x + 5y - 2z + t &= 1 \\ 5x + 12y - 7z + 6t &= 7 \end{cases}$$

A faire

$$\begin{cases} x + 2y - 2z &= -1 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ 5x + 3y - 4z &= 2 \end{cases}$$

5. Déterminer les valeurs de k de sorte que les systèmes suivants d'inconnues x , y et z admettent, (i) une unique solution, (ii) aucune solution, (iii) une infinité de solutions.

$$\begin{cases} x - 2y & = 1 \\ x - y + kz & = -2 \\ ky + 4z & = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} kx + y + z & = 1 \\ x + ky + z & = 1 \\ x + y + kz & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y & = 1 \\ x - y + kz & = -2 \\ ky + 4z & = 6 \end{cases}$$

A faire (voir la méthode).

$$2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 4$$
$$3x - 7y + 2z - 5s + 4t = 9$$
$$5x - 10y - 5z - 4s + 7t = 22$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 3 & -7 & 2 & -5 & 4 & 9 \\ 5 & -10 & -5 & -4 & 7 & 22 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 2 & -5 & 4 & 9 \\ 5 & -10 & -5 & -4 & 7 & 22 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

variable liées : variable liées correspondant aux pivots : x, y, s

variable libres : z et t

$$\begin{cases} x - 2y - z - s + 2t = 5 \\ -y + 5z - 2s - 2t = -6 \\ \\ s - 3t = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + z + s - 2t + 5 \\ y = 5z - 2(-3 + 3t) \\ s - 3t = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 11z - 15t + 26 \\ y = 5z - 8t + 12 \\ s = -3 + 3t \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{ (11z - 15t + 26, 5z - 8t + 12, -3 + 3t, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \}$$

si l'on fixe $z = 0$, $t = 0$ on obtient :

$$(26, 12, 0, -3, 0)$$

5)

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - y + kz = -2 \\ ky + 4z = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & k & -2 \\ 0 & k & +4 & 6 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & k & -3 \\ 0 & k & 4 & 6 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - kL_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4-k^2 & 6+3k \end{array}\right)$$

$3(4-k^2) = 6+3k$

si $k = -2$

$\boxed{0=0}$ infinite solution -

si $k = 2$) pas de solution

$3(4-k^2) = 6+3k$

$3 = 6+3k$

car pas de pivot
3e variable libre

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$y = -3+2z$

$x = 1+4(-3+2z) = -5+4z$

$S = \{(-5+4z, -3+2z, z) \,;\, z \in \mathbb{R}\}$.

si $k \notin \{-2, 2\}$:

$4-k^2 \neq 0$ Donc pivot dans chaque colonne. (Système admet une unique solution).

1 seule solution : $\begin{cases} x = 1 - 6 - \dfrac{6k}{2-k} = \cdots \\ y = -3 - \dfrac{3k}{2-k} \\ z = \dfrac{3}{2-k} \end{cases}$

6)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & \boxed{2} & -5 & b-2a \\ 0 & -4 & 10 & c-a \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & -5a+2b+c \end{array}\right)$$

le système est compatible ssi : $-5a + 2b + c = 0$

7) $(1, P)$

$(2, q)$

$(3, R)$

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$P(1) = P \qquad P(2) = q \qquad P(3) = R$

$$\begin{cases} \boxed{a} + b + c = P \\ 4a + 2b + c = q \\ 9a + 3b + c = R \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & \boxed{-2} & -3 & q-4p \\ 0 & -6 & -8 & R-9p \end{array}\right.$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & -2 & -3 & q-4p \\ 0 & 0 & 1 & R-3q+3p \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ 3x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

variable liées. $\begin{cases} z = -2 & y = -4 \\ -3y - 12 = 0 \end{cases}$ libre $\{ x = 7$

$$x - 8 + 2 = 1$$

$$x = 8 + 1 - 2$$

$$x = 9 - 2 = 7$$

$$\boxed{k^2 + rk}$$

$$k(k + r)$$

$$10t + r$$

$$2 \times r \times t + r$$

$$r(2t + 1)$$

$$10r + r$$

Exercice 3 :

$$2x_1 + 8x_3 = 0$$

$$-2x_1 + x_3 = 0$$

$$4x_1 + 7x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on a trouvé une combinaison nulle non triviale de ces 3 colonnes donc la famille n'est pas libre donc le système admet une infinité de solution.

sans x_2 : $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ est une famille libre.

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La famille est libre donc le système admet une unique solution : $x_1 = 0$, $x_3 = 0$

$$\begin{cases} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 = 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 37 & 119 \\ 5 & 19 & 57 \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas de pivot dans chaque colonne donc le système adm une infinité de solution.

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 37 \\ 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 119 \\ 57 \end{pmatrix} \text{ sont}$$

$$\mathrm{vect}\left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 37 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 119 \\ 52 \end{pmatrix} \right\},$$

$\subset \mathbb{R}^2$

donc $\dim \mathrm{vect}\{(\ ), (\ ), (\ )\} \leqslant 2$

La famille est liée

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2$

$L_3 \leftarrow L_1 - L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$-12x_3 = 0$

$\underline{x_3 = 0}$

$-5x_2 = 0$ $\quad \underline{x_2 = 0}$ $\quad \underline{x_1 = 0}$

Donc famille libre engendre $\mathbb{R}^3$

Mq: $(u+v,\ u-v,\ u-2v+w)$

$$\alpha(u+v)+\beta(u-v)+\gamma(u-2v+w)=0$$

$$\alpha u+\beta u+\gamma u$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)u+v(\alpha-\beta-2\gamma)+\gamma(w)=0$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha-\beta-2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\gamma = 0}$ $\alpha = \beta = \gamma =$

$\boxed{\alpha = \beta}$

$A(u_1, u_2)$

u_2 n'est pas un multiple de u_1

$$\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \end{array}$$

1er cas : u_1 est nul $\vec{u}_1 = \vec{0}$

$$0x_1 + 8x_2 = 0$$

infinité de solution prenez colonne. et $x_2 = 0$

2ème cas : $\vec{u}_1 \neq 0$ colonnes indépendantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c.

$$\left\{\begin{array}{c|cc} \Gamma & \Gamma & \Gamma \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 19 \\ -3 & 0 & 17 \end{array}\right.$$

TD 03 :

Exercice 2 :

Rappels : Soit E un espace vectoriel

F est un sous espace vectoriel de E.

Ssi * $F \neq \emptyset$ (rq $0 \neq F$)

* Si $u, v \in F$, $u+v \in F$
* Si $\lambda \in F$, et $u \in F$, $\lambda u \in F$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, v \in F$, $\lambda u + v \in F$.

I. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=7\}$

$F \subset \mathbb{R}^2$

$(0,0) \notin F$ donc F n'est pas un sous espace vectoriel. ($x+y=7$ n'est pas une équation homogène).

II/ $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0\}$ $E = \mathbb{R}^2$

Soit $u = (-3, -1) \in F$

$v = (2, 2) \in F$

$u+v = (-1, 1) \notin F$.

F n'est pas stable par addition : F n'est pas un sev.

III

$F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x+y+a=0$

$x + 3ay = 0 \}.$

$a \in \mathbb{R}$

Il faut nécessairement que $a=0$.

sinon $(0,0,0) \notin F$.

$F_0 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x+y=0$

$x=0. \}$

* $(0,0,0) \in F_0$ donc $F_0 \neq \emptyset$

* $F_0 = \{ (0,0,z) \in \mathbb{R}^3, z \in \mathbb{R} \}.$

$\forall u, v \in F, \ u+v \in F;$

Soit : $u = (0,0,z_1)$

$v = (0,0,z_2).$

On a $u+v = (0,0,z_1+z_2) \in F$

F_0 est stable par addition.

* $\forall \lambda \in F, \forall u \in F, \lambda u \in F.$

Soit $\lambda \in F$, soit $u \in F$,

$u = (0,0,z) \in F_0$

$\lambda u = (0,0,\lambda z). \in F_0.$

donc F_0 est stable.

due F_0 est un sous espace vect de $\mathbb{R}^3$.

4 et 5 a faire seul.

4 : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Mq $0 \in F$. Soit $x=0, y=0, z=0$;

donc : $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$

Ainsi $0 \in F$.

$\forall \lambda \in F$, $\forall u \in F$, on a

$\lambda u \in F$;

on a $\lambda < 0$;

$\forall u \geq (0,0,0)$ $\lambda = -1$ on $\lambda u < 0$.

Soit $\lambda = -1$ et $u = (1,1,1) \in F$

$\lambda u = (-1,-1,-1)$.

5/ $u : (0,0,1) \in F$

$v : (1,1,0) \in F$

$u+v = (1,1,1) \notin F$

n'est pas SEV.

Exercice 3 :

F et G deux sEV de $\mathbb{R}^n$

Mq $F \cup G$ est sEV $\Leftrightarrow$ si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Supp $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Alors $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$

donc $F \cup G$ est sEV, de $\mathbb{R}^n$.

Mq si $F \cup G$ est un sev, alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Contraposée :

$F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.

$\Rightarrow$ $F \cup G$ n'est pas un sEV de $\mathbb{R}^n$

$F \not\subset G$ alors $\exists\, u \in F$ tq $u \notin G$

$G \not\subset F$, il existe $v \in G$ tq $v \notin F$

Exercice 4 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \Longleftrightarrow \text{il existe } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

tq : $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$a\,(1,2,0)$$
$$b\,(-1,1,2)$$
$$c\,(3,0,-4)$$
$$d\,(5,1,-6).$$

$$\begin{cases} a - b + 3c + 5d \\ 2a + b + d \\ 2b - 4c - 6d \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 & x \\ 2 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 & x \\ 0 & -1 & 6 & -9 & 2x-y \\ 0 & 2 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow 2L_2 + L_1$

$0 \quad 8 \quad -24$

TD n°3. Sous-espaces vectoriels

1. a. Soit dans $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, les trois vecteurs

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur w appartient-il à $\mathrm{Vect}\{u, v\}$, le sous-espace vectoriel engendré par u et v.

b. Soient

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. A-t-on $D \in \mathrm{Vect}\{B, C\}$? $E \in \mathrm{Vect}\{B, C\}$?

c. Soit t un nombre réel, et

$$F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Pour quelle valeur de t a-t-on $F \in \mathrm{Vect}\{B, C\}$?

d. Expliciter $\mathrm{Vect}\{B, C\}$ (trouver la forme générale de ses vecteurs).

2. Déterminer si l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E, lorsque :

i. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x + y = 7\}, \ E = \mathbb{R}^2$,

ii. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy \geq 0\}, \ E = \mathbb{R}^2$,

iii. $F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + a = 0, \ \text{et } x + 3az = 0\Big\}$, où $a \in \mathbb{R}$ est une constante, $E = \mathbb{R}^3$,

iv. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } z \geq 0\}, \ E = \mathbb{R}^3$,

v. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ z(x^2 + y^2) = 0\}, \ E = \mathbb{R}^3$.

3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

4. a. On considère le s.e.v. F de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, 0), \, v_2 = (-1, 1, 2), \, v_3 = (3, 0, -4), \, v_4 = (5, 1, -6),$$

c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Donner F sous forme cartésienne, c'est-à-dire caractériser les vecteurs (x, y, z) de F par une ou plusieurs équations de la forme $ax + by + cz = 0$. Trouver la dimension de F.

b. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ y = 2x \text{ et } z - 2y - x + t = 0\}$. Après avoir vérifié que F est un sous-espace de vectoriel de $\mathbb{R}^4$, calculer sa dimension.

5. Soit F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = (ax^2 + bx + c) \sin x \,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

i. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace des fonctions réelles d'une variable réelle.

ii. Déterminer une base de F, ainsi que sa dimension.

Exercice 4 :

b) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ;\ y = 2x \text{ et } z - 2y - x + t = 0 \right\}$

vérifier F est un SEV de $\mathbb{R}^4$

$\rightarrow 0 \in F$

$\rightarrow \forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$\lambda u + v \in F$

$\rightarrow 0 \in F$:

$y = 0$. $\quad z - 0 + t = x$

$z = -t$

$\Rightarrow 0 = 0$.

$\rightarrow$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$

Soit F l'ensemble des fonctions $f : R \to R$ de la forme

$f(x)=(ax2 +bx+c)\sin x$, $\forall x \in R$,

ou` a, b, $c \in R$ sont des constantes.

i. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de F(R,R), l'espace des fonctions reelles d'une variable r´eelle.

ii. D´eterminer une base de F , ainsi que sa dimension.

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)\sin x$$

$$0 \in F \to (0x^2 + 0x + 0)\sin x$$

$$\to 0 \times \sin(x) \to 0.$$

$$\to 0 \in F.$$

$\longrightarrow$

$$f \in F \Rightarrow f(x) = \;\; -$$

$$0 \in F \Rightarrow 0(x) = \;\; - - -$$

$$\longrightarrow \sin(x)(\lambda a x^2 + \lambda b x + \lambda c) + (a'x^2 + b'x + c')\sin(x)$$

$$\longrightarrow (\lambda a + a')x^2 + (\lambda b + b')x + (\lambda c + c')\sin(x)$$

$$\longrightarrow \quad A \in \mathbb{R} \qquad B \in \mathbb{R} \qquad C \in \mathbb{R}$$

base : famille libre + génératrice :

Exercice 6 :

1ère méthode :

Algorithmiquement :

- $\{v_1\}$ est une famille libre.
- $\{v_1, v_2\}$ est une famille libre

$\{v_1, v_2, v_3, v_n\}$ libre et génératrice.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{v_1 \quad v_2 \quad v_4}$$

Base car il y a un pivot

Exercice 7 :

a) $F = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

$\qquad\qquad\qquad v_1 \qquad\quad v_2.$

i) Donner base de F :

$$\left. \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ c'est une famille libre et génératrice.}$$

v_1 et v_2 pas colinéaire est une famille libre et générateur car (Vect).

ii) Théorème de la base incomplète :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$

$L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow 5L_3 - 3L_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow 5L_1 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$10\alpha = 0$; $-5\beta = 0$; $10\gamma = 0$

$\rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\lambda v + w = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \\ \lambda t + t' \end{pmatrix} \quad \left\{ 2\lambda x + 2x' = \lambda y + y' \right.$$

$2x = y$ et $2x' = y'$

$2\lambda x = \lambda y$ et $2x' = y'$

$2\lambda x + 2x' = \lambda y + y' \Rightarrow$

$$\left\{ z - 2y - x + t = 0 \right.$$

$$z - 2y - x + t = \lambda z + z' - 2(\lambda y + y') - (\lambda x + x') + \lambda t + t'$$

$$= 0.$$

F est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène c'est donc un sev.

Dimension espace vectoriels = nbr de variable libres.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z - 2y - x + t = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z - 5 + b = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = \underbrace{5\boxed{x} - \boxed{t}}_{2 \text{ libres}} \end{cases}$$

c'est une famille libre et génératrice de F d'ou c'est une base

Donc F : 2.

ex 7 :

a) $F = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -4 & -3 & -8 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \underline{1} \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_2 - 9L_3$

$L_4 \leftarrow L_2 - 9L_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & -32 & -9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{9} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-9} \end{pmatrix}$$

6. On donne les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,0,0,0), \quad v_2 = (1,1,1,0), \quad v_3 = (0,2,2,0), \quad v_4 = (0,0,0,1), \quad v_5 = (3,1,1,2),$$

et $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Extraire de la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ une base de F. Quelle est la dimension de F ?

7. a. Soit F le s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2,3,-1)$ et $v_2 = (1,-1,-2)$.

i. Donner une base et la dimension de F.

ii. Compléter la base de F trouvée au i) en une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Mêmes questions pour le s.e.v. F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1,-4,-2,1)$, $v_2 = (1,-3,-1,2)$ et $v_3 = (3,-8,-2,7)$.

8. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous–ensemble

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x = y - 3z \, , z = 2t\}.$$

a. Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$. equation linéaire homogène donc F est un sev

b. Donner une base et la dimension de F. 2

$x - y + 3z = 0$

$z - 2t = 0$

c. Compléter cette base de F en une base de $\mathbb{R}^4$.

9. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles

$$V = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ b - 2c + d = 0\}, \quad \text{et} \quad W = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ a = d \text{ et } b = 2c\}.$$

a. Vérifier que V et W sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.

$x - y + 3z = 0$

b. Montrer que les vecteurs

$$v_1 = (1,0,0,0), \ v_2 = (0,1,0,-1), \ v_3 = (0,0,1,2),$$

$z = 2t$

forment une base de V et donner alors la dimension de V. 3

c. Trouver une base de chacun des s.e.v. $W, V + W$ et $V \cap W$ puis donner leurs dimensions respectives.

10. a. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$x - y + 6t = 0$

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = y = z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = 0\}.$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

b. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$x - y = -6t$

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = 0\}.$$

$x = y - 6t$

a. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$.

b. A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

$b - 2c + d = 0$

$b = 2c - d$

$$\begin{pmatrix} y-6t \\ y \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 2c-d \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Révision CC1 :

TD 0 1 :

1)

y le nombre de fille.
x / / / garçons.

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ 2(x - 1) = y \end{cases}$$

$x = y - 1$

$2x - 2 = y$

$2(y - 1) - 2 = y$

$2y - 4 = y$

$-4 = -y$

$\boxed{y = 4}$ nbre de fille

$\boxed{x = 3}$ nbre de garçons

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 4 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & 0 \\ -8a_3 & 4a_2 & -2a_1 & a_0 & -5 \\ 8a_3 & 4a_2 & 2a_1 & a_0 & 15 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 - 8L_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_2 & a_1 & a_0 & 4 \\ 0 & 2a_2 & 0 & 2a_0 & 4 \\ 0 & 12a_2 & 6a_1 & 9a_0 & 27 \\ 0 & -4a_2 & -6a_1 & -7a_0 & -17 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right)$$

$-6a_0 = -6$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 4 & 17 \\ 3 & -2 & 2 & 14 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array}\right)$$

$-11z = -33$

$$\text{so} \quad \left\{\begin{array}{l} z = 3 \\ y = -1 \\ x = 2 \end{array}\right\} \text{variables liées}$$

TD 0 2 :

1)

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = 2$

$\alpha_2 = 1.$

$\alpha_1 v_1 + \alpha v_2$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 . \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$

$$A\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 + 11 \\ 12 + 0 \\ 3 + 33 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = -1 \quad \alpha_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 + 0 + -4 \\ 15 + 0 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 20 \end{pmatrix}$$

2) a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha + \beta = 0$

$2\alpha + \gamma = 0$

$1\alpha = 0$

$\begin{cases} \alpha = 0 \quad \gamma = 0 \quad \beta = 0 \end{cases}$

v_1, v_2, v_3 st libre dans un espace de dim 3 donc (v_1, v_2, v_3) st une base de $\mathbb{R}^3$ (v_1, v_2, v_3) engendre $\mathbb{R}^3$.

b) $\alpha - \beta + \gamma = 0$

$\alpha - \beta + 2\gamma = 0$

$3\gamma = 0$

$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = \beta \end{cases}$

$\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0$

$\alpha + \beta + 7\gamma = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$ engendre $\mathbb{R}^2$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$\alpha + \beta + 2\gamma = 0$

$-\alpha + \gamma = 0$

$\alpha + \beta + 2\gamma = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

les vecteurs ne sont pas indépendants

(v_1, v_2, v_3) n'engendre pas $\mathbb{R}^3$.

a) $\alpha + \beta = 0$

$2\alpha + \gamma = 0$

$\alpha = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0.$) ils sont indep

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$\gamma = 0$

$\alpha = \beta$

(v_1, v_2, v_3) ne sont pas linéaire indep car $-v_1 = v_2$.

c) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 = L_2 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$-2\beta + 5\gamma = 0$$

$$-2\beta = -5\gamma$$

$$\beta = \frac{5}{2}\gamma$$

L1 IEEEA
Espaces vectoriels et applications
24 mars 2023

Contrôle continu intermédiaire (1h30)

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
La notation tiendra compte de la présentation et de la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Systèmes linéaires. Résoudre le système suivant à l'aide de l'algorithme de Gauss. On précisera les variables libres et les variables liées.

$$\begin{cases} x+2y-z & =1 \\ 2x+y+4z & =2 \\ 3x+3y+4z & =1 \end{cases}$$

Exercice 2. Indépendance linéaire. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$?

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Sous-espaces vectoriels. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs v_1, v_2 et v_3 définis par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Mettre F sous forme cartésienne. Déterminer sa dimension.

Exercice 4. Base. Soit $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (1,1,1)$ et $u_3 = (1,0,1)$.

(1) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer les composantes $(v)_{\mathscr{B}}$ de $v = (4,3,2)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 1 :

1)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\Downarrow \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Big\Downarrow \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} z = -2 \\ y = -4 \\ x = 7 \end{cases}$$
variables liées

Exercice 2 :

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\alpha + 2\beta = 0$$
$$2\alpha + \beta = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Big\Downarrow \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$-3\beta = 0$$

donc (v_1, v_2) est libre
$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

donc (v_1, v_2) est de dim 2.

b) $v_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\alpha + \beta + 2\gamma = 0$

$-\alpha + \gamma = 0$

$\alpha + \beta + 2\gamma = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Downarrow$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$\{ \beta + 3\gamma = 0$

il existe une infinité de solutions

Exercice 3 :

Exercice 3. Sous-espaces vectoriels. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs v_1, v_2 et v_3 définis par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F$, $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, tq :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 .$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -4 & x \\ 2 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 3 & z \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -4 & x \\ 0 & 2 & 5 & y-x \\ 0 & 4 & 10 & 2z-x \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -4 & x \\ 0 & 2 & 5 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & 2z-x-2(y-x) \end{array}\right)$$

$$2z \cancel{-x} - 2y + 2x$$

$$2z - 2y + x$$

$$2(z-y) + x$$

$$F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2z - 2y + x = 0 \}.$$

Dim 2

Fiche TD 4 :

Exercice 6 :

b) $f(F) = F$

$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x = y = z \right\}$.

pour calculer $f(G)$ (calculer l'image d'une base de G)..

Qu'est ce qu'une base de G ? $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f(e_1 + e_2 + e_3) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3)$$

$$= e_3 + e_2 + e_1 + e_3 + e_1 + e_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc $f(G) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = G$

Exercice 7 : Théorème du rang : $\dim E = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$

a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ surjective.

$4 = \dim \ker f + 2$

$\dim \ker f = 2$.

b) $g : \mathbb{R}^{15} \to \mathbb{R}^{30}$ injective. (noyau = 0) quand injective

si espace départ < espace arrivée impossible d'avoir une app surjective.

$\ker g = \{0\}$

$\dim \mathbb{R}^{15} = \dim \ker g + \dim \mathrm{Im} g$

$15 = 0 + \dim \mathrm{Im} g$

c) $f : \mathbb{R}^{25} \to \mathbb{R}^{40}$

$\dim \mathbb{R}^{25} = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$.

Si f est surjective, alors $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^{40}$

donc $25 = \dim \ker f + 40$

Exercice 8 :

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3.$

Matrice de f base canonique

$$\text{Mat} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espace départ}}, \ \overbrace{f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{espace arrivée}} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$\iff x+y+z=0$

$\iff x = -y-z$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker f = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Autre méthode :

$f(e_1) = f(e_2)$

$f(e_2 - e_1) = 0.$ $\quad f(e_3 - e_1) = 0 \to e_3 - e_1 \in \ker f.$

$f(e_1) = f(e_3)$

Donc Dim Ker f ≥ 2

mais ker f $\neq \mathbb{R}^3$ car $f(e_1) \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

donc Ker f = Vect $\{e_2 - e_1, e_3 - e_1\}$

$\underset{3}{\dim \mathbb{R}^3} = \underset{2}{\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}} + \dim \operatorname{Im} f$

dim Im f = 1.

Autre méthode :

Mat f = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Im f = Vect$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

$= \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Image d'une base est famille génératrice de l'image

Rang f = dim de l'image = 1

rg f = dim Im f = 1.

b) Mq : $f^2 = 3f$.

Avec les matrices : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1\times1 + 1\times1 + 1\times1) \; 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1$

$A^2 = 3A$ donc $f^2 = 3f$.

Exercice 9 : A faire

Exercice 10 :

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Mat f = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} 2x - y + z \\ 3x + 2y - 3z \end{pmatrix}$.

$2x - y + z = 0$
$3x + 2y - 3z = 0$

$f(v_1) = 2w_1 + 3w_2$

$f(v_2) = -w_1 + 2w_2$

$f(v_3) = w_1 - 3w_2$.

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$$

nbre de variable libre = dim noyau $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \underline{7} & \boxed{-9} \end{pmatrix}$

nbre de v. libres = dim Im f.

$$f(v_1') = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(v_2') = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(v_3') = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Mat} f = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

TD numéro 4 :

Rappel :

ker f   Im f

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$.

* f est une application linéaire ssi :

$\forall\, u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

$\longrightarrow f(u+v) = f(u) + f(v)$

$\longrightarrow f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

* Noyau de f :

$$\ker f = \{ u \in E,\ f(u) = 0_F \}.$$

* Image de f :

$$\operatorname{Im} f = \{ f(u),\ u \in E \}.$$

Exercice 1 :

1) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 2x^2$.

Prouver que c'est une application linéaire ou pas :

$f(1) = 2 \times 1^2 = 2$

$f(2) = 2 \times 4 = 8$

$f(3) = 9 \times 2 = 18$

$f(1+2) \neq f(1) + f(2)$.

Donc f_1 n'est pas une application linéaire.

2) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 2x$

* Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_2(\lambda x + y) &= 2(\lambda x + y). \\ &= 2\lambda x + 2y \\ &= \lambda f_2(x) + f_2(y). \end{aligned}$$

Donc f_2 est linéaire.

* $\ker f_2 = \{ u \in E,\ f_2(u) = 0_{F_2} \}$.

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$\ker f_2 = \{0\}$. Si le noyau $= 0$, Alors f_2 est injective.

* $\operatorname{Im} f_2 = \{ f(u),\ u \in E \}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$.

$f(y/2) = 2 \times \frac{y}{2} = y$. en plus de ça elle est surjective.

Mat $f_2(2)$.

car $f_2(1) = 2$ car $\mathbb{R}$ base canonique $= 1$.

D'ou f_2 bijective

bases canoniques: $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}$ $\underline{1}$.

3) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y)\ (-x,\ x+y,\ x-y)$.

Mq f_3 linéaire:

$$f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda(a,b) + (x,y)) = (-\lambda a,\ \lambda(a+b),\ \lambda(a-b)) + (-x,\ x+y$

$\lambda f((a,b)) + (x,y) = \lambda(-a,\ a+b,\ a-b) + (-x,\ x+y,\ x-y)$ $x-y)$.

$$(-\lambda a,\ \lambda(a+b),\ \lambda(a-b)) + (-x,\ x+y,\ x-y)$$
$$\shortparallel$$
$$f(\lambda(a,b) + (x,y)).$$

Donc f_3 est linéaire.

Ker f_3 : $\{ u \in E,\ f(u) = 0 \}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y + 0 = 0 \\ y = 0. \end{array}}$$

$-x = 0$ $\quad x = 0$

$x + y = 0$ $\quad$ ~~Soit $x = -y$~~ ou $x = 0$ $y = 0$

$x - y = 0$ $\quad$ Soit ~~$x = y$ et $x \neq 0$ $y \neq 0$~~ ou $x = y$ et $x = 0$ $y = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ker $f_3 = \{(0,0)\}$. Alors f_3 est injective car $\ker f_3 = \{(0,0)\}$.

Im $f_3 = \{ f((a,b)),\ (a,b) \in E^2 \}$.

$= \left\{ x\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right.$

vect $\left\{ \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ famille libre

Donc Dim $f_3 = 2$. Alors Im $f_3 \neq \mathbb{R}^3$

d'où f_3 n'est pas surjective.

Essai : Par pivot de Gauss :

(x,y) $\quad (-x,\ x+y,\ x-y)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

on se rend compte que les variables liées = dim Im f_3.
" " " " " " libres = dim ker f_3.

Donc

Dim E = nombre de var liées + var libres.

Théorème du Rang : $\text{Dim } E = \text{Dim Im } f + \text{Dim Ker } f.$

Donc $2 = 0 + 2$. Dans f_3.

Matrice Associée a f_3.

base Canonique de $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\text{Mat}_e\, f_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

$$f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (x,y) \mapsto (3x+4y)$$

Mq f_4 est linéaire :

$$f(\lambda(x,y) + (a,b)) = \lambda(3x+4y) + 3a + 4b$$

$$= \lambda f((x,y)) + f((a,b)).$$

Donc f_4 est linéaire.

* $\ker f_4 : \{ v \in E,\ f(v) = 0 \}.$

$3x + 4y = 0$

$x = \dfrac{-4y}{3}$. $\quad \begin{pmatrix} -\frac{4y}{3} \\ y \end{pmatrix}$

Alors le noyau est dimension 1 car $y = \dfrac{-3x}{4}$ ce qui est une droite.

Donc f_4 n'est pas injective.

Theorème du Rang : $\dim E = \dim \mathrm{Im} f + \ker f$.

$$2 = \dim \mathrm{Im} f_4 + 1$$

$$\dim \mathrm{Im} f_4 = 1.$$

Or, $\mathrm{Im} f_4 \subset \mathbb{R}$ Donc f_4 est surjective.

Matrice associée :

$\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$$
$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4.$$

$$f_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (3, 4).$$

$$f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \quad (-x, y-3, y-1)$$

A faire

Exercice 2 :

$$\Theta_1 : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$
$$f \to f(1)$$

Soient f et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Theta_1 = (\lambda f + g)(1) = \lambda f(1) + g(1).$$

Donc Θ_1 est linéaire.

$$\Theta_2 : \mathcal{C}^1 \mathbb{R} \to \mathcal{C}^0 \mathbb{R}$$
$$f \to 2f + f'$$

Soient f et $g \in \mathcal{C}^1 \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\Theta_2(\lambda f + g) = \lambda \Theta_2(f) + \Theta_2(g)$$

$$\Theta_2(\lambda f + g) = (2f + f')\lambda + (2g + g')$$
$$= \lambda 2f + \lambda f' + 2g + g'$$
$$= \lambda \Theta_2(f) + \Theta_2(g)$$

Donc Θ_2 est linéaire

$$\Theta_3 : \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \to \int_0^1 f(x)\, d(x).$$

Soit $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Theta_3(\lambda f + g) = \lambda \left(\int_0^1 f(x)\, d(x)\right) + \int_0^1 g(x)\, d(x)$$
$$= \lambda \Theta_3(f) + \Theta_3(g).$$

$$\Theta_4 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[X]$$
$$P \to P^2 + P$$

n'st pas linéaire.

Exercice 3:

A faire

Exercice 4:

a) $E = \mathbb{R}_3[x]$.

$$\mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$$
$$P \to P'$$

base canonique de $(1, x, x^2, x^3)$

$f(1) = 0$

$f(x) = 1$

$f(x^2) = 2x$

$f(x^3) = 3x^2$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \cdots & \\ \cdots & & & & & \ddots & \cdots & \\ \cdots & & & & & & n-1 & \cdots \\ \cdots & & & & & & & n \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

Soient $u, v \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(\lambda(x,y,z) + (a,b,c)) =$$

$$\lambda(2x + y - z, x+y) + (2a + b - c, a+b)$$

$$\lambda(2x+y-z), (\lambda x + \lambda y) + (2a+b-c, a+b)$$

$$\lambda 2x + \lambda(y-z), \lambda x + \lambda y + (2a+b-c, a+b)$$

$$\lambda(2x+y-z, x+y)$$

$$\lambda f(x,y,z) + f(a,b,c).$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0_{\mathbb{R}^2} \\ x + y = 0_{\mathbb{R}_2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = -y$

$z = -y \qquad (-y; y; -y)$

$y(-1;1;-1)$

$\text{vect}\{(-1,1,-1)\}$.

Dim $\ker f = 1$. Pas injective.

$\text{Dim } E = \text{Dim Im} + 1$

Im f.

$3 = \text{Dim Im } f + 1$

$\text{Dim Im } f = 2$.

Donc $\dim \text{Im}(f) = 2$

$\left.\begin{array}{l} \\ \text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2 \end{array}\right\}$ Donc $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$

Donc surjective

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \quad (2x+y-z, x+y)$

$\forall \underset{\alpha}{(a,b,c)}, \underset{\beta}{(x,y,z)}, \lambda \in \mathbb{R}$.

$f(\lambda\alpha + \beta) = \lambda f(\alpha) + f(\beta)$.

$f(\underline{\lambda\alpha+\beta}) = \lambda(2a+b-c, a+b) + (2x+y-z, x+y)$

$\underline{\lambda f(\alpha) + f(\beta)} = \lambda(2a+b-c, a+b) + (2x+y-z, x+y)$

Donc f est linéaire.

Calcule de Matrice Inversible :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit une matrice 2x2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si $a \times d - c \times b = 0$ Alors matrice irreversible

$$C \times C^{-1} = I_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \times a + 2 \times c & 2 \times d \\ 1 \times a + 2c & S + 2D \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4 L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 3(2+2) - 7(-1-2) + 6(1-2)$$
$$= 21$$
$$\neq 0$$

Donc l'image de A existe.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \bigg| & 0 \\ 2 & 1 & \bigg| & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \bigg| & 0 \\ 0 & -1 & \bigg| & 0 \end{pmatrix}$$

$-1\beta = 0$ $\quad$ $\beta = 0$ $\quad$ $3\alpha + 0 = 0$

$\alpha = 0.$

$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (2,3)$

$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (1;-2)$

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $(2, 17)$

c) $\mathcal{B} = ((3,2),(2,1))$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Det: $3-4=-1$

$L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3} L_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\frac{4}{6} \times \frac{1}{3}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3} - \frac{4}{6}$

e) $M_B = P^{-1} \times P \times M_{\varepsilon}(f)$

$3\alpha + 2\beta = 0$

$2\alpha + \beta = 0$

$\alpha(3,2)$

$+\beta(2,1) =$

$(0,0)$

$(\alpha 3 + \alpha 2$

$+2\beta + \beta = (0,0)$

$(3,2) = 3(1,0) + 2(0,1)$

$(2,1) = 2(1,0) + 1(0,1)$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$-1 \times 3 + 2 \times 2 \qquad 2 \times 3 - 3 \times 2$

$-1 \times 2 + 2 \times 1 \qquad 2 \times 2 - 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$2 \times 1 + 3 \times 0 \qquad 0 \times 2 + 3 \times 1$

$1 \times 1 - 2 \times 0 \qquad 0 \times 0 - 2 \times 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$M_{At}\, f(B) = P^{-1} \times Mat\, f_{C} \times 1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{3} - \frac{4}{6} \qquad 1/3 - \frac{4}{6} \qquad \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \qquad -1/3$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3} L_2$

$$\left(\begin{array}{cc|} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & +1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad M_P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

L1 IEEEA
Espaces vectoriels et applications
12 mai 2023

Contrôle continu final (1h30)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
La notation tiendra compte de la présentation et de la qualité de la rédaction.

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (2x + y, 3x - 2y)$.

(a) Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^2$. $(2, 17) = f(v)$

(b) Soit $v = (3, -4)$. Trouver les coordonnées de $f(v)$ dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^2$. $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) Montrer que la famille $\mathscr{B} = ((3, 2), (2, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(d) Donner la matrice de passage P de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{B}$ et calculer son inverse. $M_{\mathscr{C}} f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

(e) Donner la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. $P^{-1} \times \mathrm{Mat}_B f \times P$

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit α et β :
$\alpha(3, 2) + \beta(2, 1)$
$3\alpha + 2\beta = 0$
$2\alpha + \beta = 0$.
$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$ Famille libre.

et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calculer A^2. Que peut-on dire de g ?

(b) Trouver une base $\mathscr{B}_0$ de $\operatorname{Ker} g$ et une base $\mathscr{B}_1$ de $\operatorname{Im} g$.

(c) Montrer que $\mathscr{B}_0 \cup \mathscr{B}_1$ est une base $\mathbb{R}^3$ et en déduire que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g$.

Exercice 3. Soit $h : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application qui au polynome P associe le polynome $h(P)$ défini par $h(P)(X) = P(X + 1) - P(X)$

(a) Montrer que h est linéaire.

(b) Trouver la matrice de h dans la base canonique (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$, où $P_i(X) = X^i$, $i = 0, 1, 2$.

(c) Montrer que $\operatorname{Im} h = \mathbb{R}_1[X]$.

(d) Déterminer $\operatorname{Ker} h$.

Exercice 4. Calculer (si possible) l'inverse de la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_3$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Mat P^{-1}:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

-1

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}} \times \overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker g = \{ u \in E, f(u) = 0 \}.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & =0 \\ -1 & 0 & -1 & =0 \\ 1 & -1 & 0 & =0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$2x = 2z \qquad y - z = 0$

$x = z \qquad y = z$

$\ker g = \{ (z, z, z), z \in \mathbb{R} \}$

$= \mathrm{Vect}\left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

$$\mathrm{Im}\, g = \{ f(u),\ v \in E \}.$$

Algèbre 2 Révision:

L1 IEEEA
Espaces vectoriels et applications
24 mai 2022

Seconde chance (2h)

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
La notation tiendra compte de la présentation et de la qualité de la rédaction.

on car 3 vecteurs libres.

Exercice 1. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$? Constituent-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

$v_2 = -3v_1$

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$.

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\gamma = 0$ $\beta = 0$ $\alpha = 0$ Donc est une famille libre et par suite est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs v_1 et v_2, définis par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Mettre F sous forme cartésienne. Déterminer sa dimension.

(b) Soit $v \in \mathbb{R}^3 \setminus F$ et $G = \mathrm{Vect}\{v\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 3. Vérifier si les applications θ_i entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sont linéaires ou pas. Dans le cas affirmatif, déterminer le noyau et l'image de θ_i.

(a)
$$\begin{aligned} \theta_1 : \quad \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' f . \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \theta_2 : \quad \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \int_{-1}^{1} P(x)\, dx . \end{aligned}$$

[Remarque : dans l'intégrale de la dernière question, on identifie un polynôme avec la fonction polynomiale associée.]

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application qui au polynôme P associe le polynôme $f(P)$ défini par

$$f(P)(X) = P'(X) - P(X+1).$$

(a) Montrer que l'application f est linéaire.

(b) Trouver la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ ($\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$) de $\mathbb{R}_3[X]$.

(c) En déduire que f est un isomorphisme.

Exercice 5. Calculer, si possible, l'inverse de la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$-1 - 1 = 0$

$-1 \times -5 + 2 = -3$

$$\text{Det} = 0 \times \cancel{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} - \cancel{1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$$

Det = 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow 4L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 3 & 0 & -9 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & -21 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 21 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1/3 & -2/3 \\ 4 & 1/3 & 1/3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Révisions : Espaces vectoriels
et
Applications.

Seconde chance (2h)

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
La notation tiendra compte de la présentation et de la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$? Constituent-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$. $v_2 = -2v_3$ $\beta = 0$, $\gamma = 0.$

$\alpha + \beta = 0$
$-\beta + \gamma = 0$
$\alpha - \cancel{2\beta} + \cancel{2\gamma} = 0$

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donc famille libre est generatrice $\gamma = \beta.$ $\alpha = 0$
engendre $\mathbb{R}^3$

Exercice 2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs v_1 et v_2, définis par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Mettre F sous forme cartésienne. Déterminer sa dimension.

(b) Soit $v \in \mathbb{R}^3 \setminus F$ et $G = \mathrm{Vect}\{v\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 3. Vérifier si les applications θ_i entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sont linéaires ou pas. Dans le cas affirmatif, déterminer le noyau et l'image de θ_i.

(a) $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$ $f(\lambda U + V)$
$u = U$ $v = V$

$$\theta_1 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'f. \end{array}$$

$= f(\lambda(U'U)$
$+ V'V)$

(b) $\mathrm{Ker} f = \{ U \in \mathbb{R}, f(u) = 0 \}$

$$\theta_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)\, dx. \end{array}$$

$\lambda f(U) = \lambda U'U$

$f'f = 0$ $\mathrm{Ker} \{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}), f'f = 0 \}.$

[Remarque : dans l'intégrale de la dernière question, on identifie un polynôme avec la fonction polynomiale associée.]

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application qui au polynôme P associe le polynôme $f(P)$ défini par

$$f(P)(X) = P'(X) - P(X+1).$$

(a) Montrer que l'application f est linéaire.

(b) Trouver la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ ($\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$) de $\mathbb{R}_3[X]$.

(c) En déduire que f est un isomorphisme.

Exercice 5. Calculer, si possible, l'inverse de la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1 : SEV

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / xy=0 \text{ et } y+z=0\}$

n'est pas un SEV.

i) $0 \times 0 = 0$
$0 + 0 = 0$

ii) $X + Y$

$X = (x, y, z)$

$Y = (x', y', z')$

$X + Y = (x+x', y+y', z+z')$

$x'' \cdot y'' = \underset{0}{xy} + x'y + y'x + \underset{0}{y'x'}$

$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+2y=0 \text{ et } y+z=1\}$

i) $(0,0,0)$ $\quad x+2y=0$ vrai
$y+z \neq 0$.

Donc n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^3$.

$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0 \text{ et } 2y-z=0\}$

i) $(0,0,0)$ / $x \geq 0$ vrai

$2y - z = 0$ vrai

ii) $\alpha X + Y = 0$

$X = (x, y, z)$ $\quad X + Y = (\overset{x''}{x+x'}, \overset{y''}{y+y'}, \overset{z''}{z+z'})$

$Y = (x', y', z')$.

$x'' \geq 0$ et $2y'' - z'' = 0$.

$X = (1, 1, 2)$, $\alpha = -1$

$\alpha X = (-1, -1, -2)$

$x < 0$ et $2y - z = 0$.

n'est pas SEV.

$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+2y=0 \text{ et } x+y+z=0\}$.

i) $(0,0,0)$ $\quad 0+0=0$ $\quad 0+0+0=0$.

$X = (x, y, z)$ $\quad Y = (x', y', z')$

Rappel : Soit E e.v sur $\mathbb{R}$ et $F \subset E$

Soit $x, y \in F$
$\alpha \in \mathbb{R}$

i) $0_E \in F$

ii) $x + y \in F$ L.C.I

iii) $\alpha X \in F$ L.C.E

or

i) $0_E \in F$

ii) $\alpha X + Y \in F$

ii) $\alpha(x,y,z)+(x',y',z')$

$(\alpha x,\alpha y,\alpha z)+(x',y',z')$

$\alpha(x+2y=0$ et $x+y+z=0)+(x'+2y'=0$ et $x'+y'+z'=0)$

Donc est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha X+Y=\alpha(x,y,z)+(x',y',z')$$
$$=(\underbrace{\alpha x+x'}_{x''},\underbrace{\alpha y+y'}_{y''},\underbrace{\alpha z+z'}_{z''})$$

$x''+2y''=(\alpha x+x')+2(\alpha y+y')=$
$\alpha(x+2y)+x'+2y'=0.$

$x''+y''+z''=(\alpha x+x')+(\alpha y+y')+$
$\alpha(z+z').$

$$=\alpha\underbrace{(x+y+z)}_{0}+\underbrace{(x'+y'+z')}_{0}$$

Donc est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2:

$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

$$\alpha X+\beta Y+\gamma Z=0_{\mathbb{R}}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0.\end{cases}$$

$(x, x-y, z-x)$ est libre.

$$\alpha' x + \beta'(x-y) + \gamma'(z-x) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha' = 0 \\ \beta' = 0 \\ \gamma' = 0. \end{cases}$$

$$\underbrace{(\alpha' + \beta' - \gamma')}_{\alpha} x \underbrace{- \beta'}_{\beta} \cdot y + \underbrace{\gamma'}_{\gamma} z .$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0_{\mathbb{R}} .$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 + 0 - 0 = 0 . \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 . \end{cases}$$

Donc (x, y, z) est linéairement indépendant

Exercice 3: Méthode de dépend..

$\overset{v_1}{(3, 1, -1)}$; $\overset{v_2}{(-1, 1, 2)}$, $\overset{v_3}{(1, -1, 1)}$

$\overset{u}{(5, -2, 3)}$.

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = u$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$3\alpha - \beta + \gamma = 5$$
$$\alpha + \beta - \gamma = -2$$
$$-\alpha + 2\beta + \gamma = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Université de Rouen Normandie

Portail L1 Info EEEA

TD 1 : Les systèmes linéaires

Espaces vectoriel et Applications

Université de Rouen Normandie

Portail L1 Info EEEA — TD 1 : Les systèmes linéaires

Espaces vectoriel et Applications

Exercice 4 :

$$\begin{cases} x-2y+z=7 \\ 2x-y+4z=17 \\ 3x-2y+2z=14 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 4 & 17 \\ 3 & -2 & 2 & 14 \end{array}\right) \xRightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array}\right)$$

Deux méthodes à partir de là soit repasser aux inconnus soit remonter.

On repasse aux inconnus :

$-11z = -33$

$z = \frac{33}{11} = 3.$

$3y + 6 = 3$

$3y = -3$

$y = -1$

$x + 2 + 3 = 7$

$x = 7 - 5 = 2.$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3. \end{cases}$$

on peut confirmer notre résultat en remplaçant les valeurs obtenus dans les équations.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 2 \\ 2x + 5y - 2z + t = 1 \\ 5x + 12y - 7z + 6t = 7 \end{cases}$$

De la même manière que le premier système. on trouve que le système n'admet pas de solution.

Exercice 6 :

$\longrightarrow$ page suivante

Université de Rouen Normandie

Portail L1 Info EEEA

TD 1 : Les systèmes linéaires

Espaces vectoriel et Applications

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7c = c. \end{cases}$$

pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & -4 & 10 & c-a \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad l_3 \leftarrow l_3 + 2l_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & c - a + 2(b-2a) \end{array}\right)$$

le Système est Compatible ssi : $c - a + 2(b - 2a)$
$= c + 2b - 5a = 0$.

Exercice 7 :

$P(x) = ax^2 + bx + c$
$P(1) = a + b + c$
$P(2) = 4a + 2b + c$
$P(3) = 9a + 3b + c$.

$$\begin{cases} a + b + c = P \\ 4a + 2b + c = 9 \\ 9a + 3b + c = R. \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ page suivante.

Pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & p \\ 4 & 2 & 1 & q \\ 9 & 3 & 1 & k \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & -2 & -3 & q-4p \\ 0 & 0 & 1 & k-3q+3p \end{array}\right)$$

Université de Rouen Normandie

Portail L1 Info EEEA **TD 2 : L'espace Vectoriel R m**

Espaces vectoriel et Applications

Exercice 1 :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$.

$\alpha_1 v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} = \mathcal{E}$

moyen mnémotechnique

$A \times \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} = (6+11,\ 4\times 3 + 0 \times 11,\ 3+33)$

(on prend la ligne et pas la colone pm par une ligne)

$= (17, 12, 36)$.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$

$\underbrace{\alpha_1 v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}}_{+}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times A = \begin{pmatrix} -2+0+20 \\ -3+0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}$

Université de Rouen Normandie

Portail L1 Info EEEA

TD 2 : L'espace Vectoriel R m

Espaces vectoriel et Applications

Exercice 2 :

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sont-il linéairement independants :

$\alpha + \beta = 0$

$2\alpha + \gamma = 0$ donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$\alpha = 0$ Alors ils sont linéairement independant

Par conséquent il engendrent $\mathbb{K}^3$.

Vect(v_1, v_2, v_3). SEV de $\mathbb{K}^3$.) A Confirmer Avec M. Tierce.

b).

$\alpha - \beta + \gamma = 0$

$\alpha - \beta + 2\gamma = 0$

$3\gamma = 0$

$\gamma = 0$

$\alpha = \beta$ par forcent $= 0$ Donc ne sont pas linéairement indépendant

ou simplement dire que $v_1 = -v_2$.

c). $\begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 7\gamma = 0. \end{cases}$ Gauss : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right)$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right)$ $-2\beta + 5\gamma = 0$

$\alpha + \frac{5\gamma}{\cancel{2}} + \cancel{2}/\gamma = 0$ $\beta = \frac{5\gamma}{2}$

$\alpha = -6\gamma$ $(-6\gamma, 5\gamma/2, \gamma)$. Donc pas linéaires independant.

Exercice 3 :

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Il existe une infinité de solution

$$\begin{cases} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 = 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 37 & 119 & 0 \\ 5 & 19 & 57 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow 7L_2 + 5L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 37 & 119 & 0 \\ 0 & 318 & 994 & 0 \end{array}\right)$$ une infinité de solutions.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

l'échel gauss plus tard...

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

une seule solution

$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

Donc les le 3 colonne linéaire indépendantes.

Exercice 4 :

$$\underbrace{U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}}_{\substack{\alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0.}}$$

couple dans $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha v + \beta U + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

$$\alpha v + \alpha U + \beta U - \beta v + \gamma U - \gamma 2 v + \gamma w = 0.$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) U + (\alpha - \beta - 2\gamma) v + \gamma w = 0.$$

A voir avec monsieur Tiacco Younes.

$\alpha = 0$ $\beta = 0$ $\gamma = 0$ Donc $0U + 0v + 0w = 0$. Donc linéaire indépendants.

Université de Rouen Normandie

Portail L1 Info EEEA

TD 2 : L'espace Vectoriel R m

Espaces vectoriel et Applications

Exercice 8 :

$$\beta + \gamma = 0$$
$$\alpha + \gamma = 0$$
$$\alpha + \beta = 0.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Swap($L_3 \Leftrightarrow L_1$.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$2\gamma = 0$

$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$ $\alpha = 0$

Montre qu'elle est libre

Montrons qu'elle est génératrice :

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x, y, z).$$

$$\beta + \gamma = x$$
$$\alpha + \gamma = y$$
$$\alpha + \beta = z.$$

Donc elles est generatrice

et Donc est une base de $\mathbb{R}^3$.

b)

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Université de Rouen Normandie

Portail L1 Info EEEA

TD 2 : L'espace Vectoriel R m

Espaces vectoriel et Applications

Exercice 9 :

$f(x) = \cos(x)$

$g(x) = \cos(2x)$

$h(x) = \cos(3x)$

$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0.$

$x = 0$ $\quad \alpha + \beta + \gamma = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ $\quad -\beta + \gamma = 0$

$x = \pi$ $\quad \alpha - \beta + \gamma = 0.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-2\beta = 0$

$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}$ Donc famille libre.

Université de Rouen Normandie

Portail L1 Info EEEA

TD 3 : Sous Espaces Vectoriels

Espaces vectoriel et Applications

Exercice 1 :

a) $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

petite idee on peut considerer que c'est une famille libre et puis voir si c'est le cas ou non.

$$-\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0$$
$$2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

A vue d'oeil pas libre.

$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$7\beta + 4\gamma = 0$$

$$\beta = \frac{-4\gamma}{7}$$

$$-\alpha - \frac{4\gamma}{7} + 3\gamma = 0$$

$$\alpha = \frac{-4\gamma}{7} + 3\gamma$$

$$\alpha = -\frac{8\gamma}{7} + \frac{21\gamma}{7}$$

$$\alpha = \frac{13\gamma}{7}$$

n'est pas libre car il existe une infinite de solution.

on fixe γ et on produit α et β.

γ peut prend n'importe qu'elle valeur.

Or si la famille était libre la seul solution serait la solution triviale $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

16, 92.

15

16,10 15,5 15,5

b)

$-\alpha + \beta = \gamma$

$\alpha + \beta = 2\gamma$

$\alpha + \beta = \gamma$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$2\beta = 2\gamma$

$\beta = \gamma$ $\alpha = \beta = \gamma$

$\alpha = \gamma.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

C'est une famille libre. $D \notin \{B, C\}$

$\alpha + \beta - 5\gamma = 0$

$-\alpha + \beta - \gamma = 0.$

$$\begin{cases} -\alpha + \beta - 5\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$4\gamma = 0$

$\gamma = 0$ $-\alpha + \beta + 0 = 0$

$\alpha = \beta$ mais pas forcément égale à 0 donc $\alpha = \beta.$
n'est pas linéair indépendants. Donc $E \in \{B, C\}.$

pas sur à revoir avec des Tierce

Université de Rouen Normandie

Portail L1 Info EEEA

TD 3 : Sous Espaces Vectoriels

Espaces vectoriel et Applications

Exercice 1 :

A revoir avec Tracer

$$-\alpha+\beta-2=0$$
$$\alpha+\beta-1=0$$
$$\alpha+\beta-t=0$$

$$-\alpha+\beta=2$$
$$\alpha+\beta=1$$
$$\alpha+\beta=t$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & t+2 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & t-1 \end{array}\right) \qquad t=1$$

$$-\alpha+\beta-2\gamma=0$$
$$\alpha+\beta-\gamma=0$$
$$\alpha+\beta-\gamma=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-1} & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -\alpha+\beta-2\gamma=0 \\ \alpha+\beta-\gamma=0 \\ \alpha+\beta-t\gamma=0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -t & 0 \end{array}\right) \qquad -t+1\gamma=0$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -t-2 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -t+1 & 0 \end{array}\right)$$

Université de Rouen Normandie

Portail L1 Info EEEA **TD 3 : Sous Espaces Vectoriels**

Espaces vectoriel et Applications

Exercice 1 : Soit v un vecteur (x, y, z). Soit u et v $\in \mathbb{R}$

d)

$$(x, y, z) = U(-1, 1, 1) + V(1, 1, 1)$$

$x = -U + v$ $\quad x = -y = -z$

$y = U + v$ $\quad (x, -x, -x)$

$z = U + v.$

Exercice 4 :

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \\ 3a - 4c = 0 \\ 5a + b - 6c = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il existe une infinité de solution.

la dimension de F est de 2.

Car 2 pivot

b) D'après M. Tierce n equation = - n dimension de l'espace

2 equ = $4 - 2 = 2$ = Dim de F.

i) $(0,0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^4} =$ $\quad 0 + 2 \times 0 = 0.$ $\quad 0 - 0 - 0 + 0 = 0$

ii) $\alpha X + Y \in F$

$X = (x, y, z, t)$ $\quad Y = (x', y', z', t')$

Université de Rouen Normandie

Portail L1 Info EEEA

TD 3 : Sous Espaces Vectoriels

Espaces vectoriel et Applications

$\alpha X + Y = (\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z', \alpha t + t')$

$= (x'', y'', z'', t'')$.

$$\begin{cases} y'' = 2x'' \\ z'' - 2y'' - x'' + t'' = 0 \end{cases}$$

$\alpha y + y' = 2(\alpha x + x')$

$\alpha y + y' = 2\alpha x + 2x'$

$$\begin{cases} 0 = 2\times 0 + 2\times 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ 0 - 2\times 0 - 0 + 0 = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Donc F est un SEV de $\mathbb{R}^4$!

Exercice 2 :

4) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } z \geq 0\}$ $E = \mathbb{R}^3$.

i) $0_{\mathbb{R}} \in F$, $0 \geq 0$ $y \geq 0$ $z \geq 0$. Vérifié

ii) $\alpha X + Y = 0$.

$X = (x, y, z)$ $Y = (x', y', z')$.

$\alpha(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0) + (x' \geq 0, y' \geq 0, z' \geq 0)$

$\alpha x x' \geq 0, \alpha y y' \geq 0, \alpha z z' \geq 0$.

$\alpha x'' \geq 0, \alpha y'' \geq 0, \alpha z'' \geq 0$.

Si $\alpha < 0$ ça ne marche pas Donc F n'est pas SEV de $\mathbb{R}^3$.

Université de Rouen Normandie

Portail L1 Info EEEA **TD 3 : Sous Espaces Vectoriels**

Espaces vectoriel et Applications

---

v) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z(x^2+y^2)=0\}$ $E = \mathbb{R}^3$.

i) $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$ $0(0+0)=0$. première condition vérifiée

ii). $\alpha X + Y \in F$

$\alpha(z(x^2+y^2)) + z'(x'^2+y'^2)$.

$\alpha z(x^2+y^2) + z'(x'^2+y'^2)$.

$\underbrace{\alpha z x^2 + \alpha z y^2} + \underbrace{\cancel{z'x'^2}}_{0} + \underbrace{\cancel{z'y'^2}}_{0}$.

$\underbrace{\forall \alpha,\ \alpha z x^2 = 0 \text{ et } \alpha z y^2 = 0.\ \text{Donc } F \not\ \text{SEV de } \mathbb{R}^3}$

pas sûr à vérifier avec

Mr Trace car normalement si il y a des x^2, y^2 etc... n'est pas SEV.

Exercice 4 :

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 3\gamma + 5\theta = 0 \\ 2\alpha + \beta + \theta = 0 \\ 2\beta - 4\gamma - 6\theta = 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & 0 \end{array}\right)}$$

$$\Longrightarrow \overset{L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2}{\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

infinité de solutions

$\dim F = 2$.

$\beta = 2\gamma + 3\theta$.

$\alpha = \cancel{2\gamma + 3\theta} - \cancel{3\gamma} - \cancel{5\theta}$

$\alpha = -\gamma - 2\theta$

$$\begin{cases} y - 2z + 3t = 0 \\ x + z + 2t = 0 \end{cases}$$

Dimension de F est 2.

Université de Rouen Normandie

Portail L1 Info EEEA **Seconde chance : 2022/2023**

Espaces vectoriel et Applications

Exercice 1 :

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ } on voit clairement que $-3v_1 = v_2$.

Mq v_1 et v_2 sont linéairement indépendants :

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta = 0 \\ -2\alpha + 6\beta = 0 \\ 3\alpha - 9\beta = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$
$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ } il existe une infinité de solutions Donc v_1 et v_2 ne sont pas linéairement indépendants. ou juste avoir le coup d'œil.

b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$ Donc sont linéairement indépendant.

il engendre $\mathbb{R}^3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y \\ 1 & -2 & 2 & z \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y \\ 0 & -3 & 2 & z-x \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y \\ 0 & 0 & -1 & z-x-3y \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \gamma = z - x - 3y \\ \beta = \gamma - y = z - x - 4y \\ \alpha = -z + 2x + 4y. \end{cases}$$

$\gamma = z - x - 3y$

base de dim 3.

$-\beta + \gamma = y$ $\quad -\beta + z - x - 3y = y$

$\alpha + \beta = x$ $\quad -\beta = -z + x + 4y$

$$\begin{cases} \beta = z - x - 4y. \\ \alpha = -z + 2x + 4y. \\ \gamma = z - x - 3y. \end{cases}$$

Exercice 2 :

a) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \beta \\ z = 2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \alpha \\ y = \beta \\ z = 2x + 3y. \end{cases}$$

Dimension 2.

b) Soit $v \in \mathbb{R}^3 \setminus F$ et $G = \text{Vect}\{v\}$, Mq $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

– $F + G = \mathbb{R}$.

v_1 et v_2 etant 2 vecteurs dans F linéaire indetid il engent un space de dimension 2. Ajout a cela le vecteur v non conten dan F, ce qui forme 3 vecteur linéairement indépendant qui engent un space de dim 3.

– $F \cap G = \{0\}$.

Soit $u \in F \cap G$

Si $u \in F$:

$u = \alpha v_1 + \beta v_2$.

Si $u \in G$:

$u = \theta v$ $\qquad$ Si $v \notin F$ donc v ne peut pas être une combinaison de v_1, v_2.

la seul vecteur qui satisf les condition est $u = 0$.

Donc $F \cap G = \{0\}$.

Donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

a) $\theta_1 : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

$f \rightarrow f' f$.

$\theta_1(\lambda u + v) = \lambda \theta(u) + \theta(v)$

$\theta_1(\lambda u + v) = (\lambda u' + v')(\lambda u + v)$.

a) Soit P et q deux polynômes appartenant à $\mathbb{R}_3[x]$.

$$f(\lambda P+q)(x) = \lambda f(P)(x) + f(q)(x).$$

$$f(\lambda P+q)(x) = (\lambda P'+q')(x) - (\lambda P+q)(x+1).$$

$$\lambda P'(x) - P(x+1) + q'(x) - q(x+1).$$

$$\lambda P'(x) + q'(x) - \lambda P(x+1) - q(x+1)$$

Donc f est bel et bien une application linéaire.

$$\frac{1}{1} \times \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b). Trouver la matrice f dans la base canonique $\mathcal{B}(1, x, x^2, x^3)$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$f(1)$

$f(1)(x) = 1'(x) - 1(x+1)$

$= 0 - 1 = -1$

$f(x)(x) = x'(x) - x(x+1)$

$=$

$$\begin{matrix} 7 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{matrix}$$

Matrice des mineurs:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

-5

$1 \quad -1$

$1 \quad 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$0 + 5 - 1 - (1 + 2)$

$5 - 1 - 1 - 2$

$$\boxed{5 - 4 = 1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right)$$

$\beta = x$

$z + 2x = y$

$\alpha = z$

$$\boxed{2x - y + z = 0}$$

Donc la dimension est égal à 1.